

Analiza matematyczna dla I roku informatyki.

Pula jawnych zadań na kolokwia.

Wydział MIiM UW, 2018/19

9 grudnia

ostatnie poprawki: 9 grudnia 2018

Szanowni Państwo,

na każdym kolokwium ponad połowa zadań będzie pochodzić z poniższej listy, lub będzie bardzo podobna do tych zadań.

Wśród zamieszczonych niżej zadań są łatwiejsze i trudniejsze. Proszę się nie zrażać, jeśli nie będą Państwo umieli zrobić wszystkich od razu.

1 Liczby rzeczywiste. Kresy zbiorów.

1. Udowodnić, że liczba $\sqrt{7 + \sqrt{3}}$ jest niewymierna.

2. Rozstrzygnąć, czy liczba $\sqrt{\sqrt{5} + 3} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ jest wymierna.

Wskazówka. Z badać sumę i iloczyn liczb $\sqrt{\sqrt{5} + 3} \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

3. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym i $\lambda \in \mathbb{R}$. Zbiór λA określamy wzorem

$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$

Oznaczmy $\sup A = M$ i $\inf A = m$. Wyznaczyć kresy zbioru λA .

4. Wyznaczyć kresy zbioru

$$\left\{ \frac{(-1)^n - m}{n + m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

5. Znaleźć kresy zbioru $\left\{ \frac{2nm}{n^2 + m^2} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

6. Wyznaczyć kresy zbioru

- $A = \left\{ k + \frac{1}{n} : k \in \{0, 1, 2\}, n \in \mathbb{N} \right\}$,

- $B = E + 2 \cdot E$, gdzie $E = \{1 + \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$,
- $C = \{\frac{n^2+2n-3}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$,
- $D = \{\frac{(n+m)^2}{2nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$.

7. Znaleźć kresy zbioru

- (i) $\{\frac{1}{k} + \frac{1}{l} - \frac{1}{m} : k, l, m \in \mathbb{N}\}$,
- (ii) $\{(1 - 4a)b^3 + a^2 : a, b \in (0, 1)\}$.

8. Znaleźć kres dolny zbioru

$$A = \{\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

9. Wyznaczyć kresy zbioru

$$\left\{ \frac{a_1}{a_2} + \frac{2a_2}{a_3} + \dots + \frac{(n-1)a_{n-1}}{a_n} + \frac{na_n}{a_1} : a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n > 0 \right\}.$$

2 Indukcja, nierówności.

10. Wykazać, że jeśli n jest liczbą naturalną parzystą, to liczba $n^3 + 20n$ dzieli się przez 48 ($= 3 \cdot 2^4$).

11. Dany jest ciąg (a_n) taki, że $a_1 = 1$, $a_2 = 8$ oraz $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n \geq 3$. Wykazać, że $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

12. Zaczynając od 0, dwóch graczy na przemian dodaje 1, 2 lub 3 do bieżącej wartości sumy. Wygrywa gracz, który pierwszy uzyska sumę co najmniej 1000. Udowodnić, że drugi gracz ma strategię wygrywającą, niezależnie od strategii gracza pierwszego.

13. Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$

- (i) $\frac{7^n - 1}{6} \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\frac{n^3 + 5n}{6} \in \mathbb{N}$.

14. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}.$$

15. Załóżmy, że (s_k) jest ciągiem liczb rzeczywistych nieujemnych, $s_1 \leq 1$, i dla każdego $k \geq 1$ spełniona jest nierówność

$$s_{k+1} \leq 2k + 3 \sum_{j=1}^k s_j.$$

Wykazać, że $s_k < 7^k$ dla wszystkich k naturalnych.

Wskazówka. $2k < 1 + 2k \leq (1 + 2)^k$ na mocy nierówności Bernoulli'ego.

16. Udowodnić, że

$$\frac{1}{2n} < \sqrt[n]{2} - 1 \leq \frac{1}{n} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

17. Wykazać, że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzą nierówności

$$(n!)^2 \leq \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right)^n,$$

$$\frac{4^n}{2 \cdot \sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n}.$$

18. Udowodnić, że dla dostatecznie dużych naturalnych n zachodzi nierówność

$$\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n < n.$$

3 Granica ciągu.

19. Obliczyć granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + \sqrt{n+1}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{n-1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

20. Udowodnić, że istnieją takie ciągi liczb wymiernych (a_n) i (b_n) , że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \sqrt{2} + b_n \sqrt{3}) = \sqrt{5}.$$

21. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 2} + \frac{1}{n^2 + 4} + \dots + \frac{1}{n^2 + 2n} \right) n.$$

22. Sprawdzić, czy zbieżny jest ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ dany przez

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{3}{4a_n} \text{ dla } n \geq 2,$$

gdzie $\alpha \geq \frac{1}{2}$. W przypadkach, gdy ciąg jest zbieżny, znaleźć jego granicę.

23. Sprawdzić, czy zbieżny jest ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ dany wzorem

$$(i) \ a_n = \frac{3^n - n!}{2^n},$$

$$(ii) \ a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

Jeśli podany ciąg jest zbieżny, znaleźć jego granicę.

24. Wyznaczyć granice ciągów rekurencyjnych określonych wzorami

$$b_n = \sqrt{2 + b_{n-1}}, \quad b_1 = \sqrt{2},$$

$$c_n = \frac{1}{1 + c_{n-1}}, \quad c_1 = 1.$$

25. Wykazać, że poniższe ciągi są zbieżne:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2},$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

26. Dany jest ciąg $(a_n)_{n \geq 1}$ taki, że $a_1 = a_2 = 1$ oraz $2a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Wykazać, że

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right)^n \right].$$

Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

27. Dany jest ciąg (a_n) taki, że $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n^2}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że ciąg (a_n) jest rozbieżny.

28. Dany jest ciąg (a_n) taki, że $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = 1/(a_1 + \dots + a_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że ciąg (a_n) jest zbieżny, a następnie znaleźć jego granicę.

29. Ciąg a_n jest dany przez równania rekurencyjne

$$a_1 = -2, \quad a_{n+1} = \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zbadać, czy ten ciąg ma granicę; jeśli tak – znaleźć ją.

4 Szeregi liczbowe i okolice

Uwaga: wszędzie w tym podrozdziale symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą (tzn. *entier*) liczby rzeczywistej x , inaczej *podłogę* x , a symbol $\lceil x \rceil$ – tzw. *sufit* liczby x , tzn. $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ dla $x \in \mathbb{Z}$ oraz $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

30. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} (\log_2 n)^4}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}.$$

31. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

32. Niech $(a_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ będzie ciągiem arytmetycznym. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}.$$

33. Dany jest ciąg (a_n) taki, że $0 < a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}$ dla $n \geq 1$. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

34. Udowodnić, że jeśli ciąg liczb dodatnich (a_n) jest ograniczony, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(na_n)$ jest rozbieżny.

35. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$. Jeśli jest on zbieżny, wyznaczyć jego sumę.

36. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n \ln n} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-\frac{1}{\sqrt{n}})}$$

37. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}.$$

38. Znaleźć wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\varepsilon_n}, \quad \text{gdzie } \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1},$$

jest zbieżny.

Wskazówka: dla każdego ciągu $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(x_n) - 1}{x_n} = 1.$$

39. Znaleźć wszystkie wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^p$$

jest zbieżny.

40. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Czy szereg:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{a_n^5}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin a_n$$

są zbieżne? Uzasadnić odpowiedź, podając dowód lub kontrprzykład.

41. Wykazać, że jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ również jest zbieżny.

42. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\ln n} (n^{a_n} - 1)$$

jest zbieżny? Uzasadnić odpowiedź.

43. Dowieść, że jeżeli (a_n) jest ciągiem liczb dodatnich, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

jest zbieżny. Znaleźć jego sumę w przypadku, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem rozbieżnym.

44. Z badać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^5(2n^7 + 13) + 10 \sin(n)}{n \ln^6(n^{\frac{7}{8}} + 2\sqrt{n} - 1) \ln(\ln(n + (-1)^n))}.$$

45. Z badać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{[1+\sin^2 n^5]} \left(\frac{n^2 + 3n + 10}{n^2 + 5n + 17}\right)^{n^2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}.$$

46. Z badać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\cos \sqrt[3]{n^3 + \sqrt{n} + 7} - \cos \sqrt[3]{n^3 - 2\sqrt{n} + 3}\right).$$

47. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp n}{\exp(n\sqrt[n]{n}) \ln^2 n}.$$

48. Obliczyć sumę

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}.$$

49. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!(n+1)^{n-1}}{n^{2n}}.$$

50. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n^3+n+1}{3n^2-1} \rfloor} \frac{\ln n}{n}.$$

51. Niech

$$S_k := \sum_{n=2}^k (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{\ln n}.$$

Czy ciąg $S_{(2k)^2}$ jest zbieżny? Czy ciąg S_k jest zbieżny? Obie odpowiedzi proszę uzasadnić.

52. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, gdzie

$$a_n = (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

53. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazach zespolonych taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Niech $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie taką bijekcją, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $|\sigma(n) - n| \leq 13$. Wykazać, że wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

jest zbieżny.

54. Wykazać, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny i ciąg wartości bezwzględnych wyrazów szeregu, $(|a_n|)$, jest monotoniczny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^3$$

jest zbieżny. Czy założenie o monotoniczności $(|a_n|)$ jest niezbędne?

55. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt[3]{n^3 + 8n + 1} \right) (\ln(n + 1) - \ln n).$$

56. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=13}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{13} \rfloor} \frac{\ln n}{n \ln(\ln n)}.$$

57. Korzystając ze wzoru De Moivre'a i równości $\sin kx = \operatorname{Im} e^{ikx}$, udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Znaleźć analogiczny wzór na sumę cosinusów.

58. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n^2}{\sqrt{n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

jest zbieżny? Uzasadnić odpowiedź.

59. Dany jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Czy wynika stąd, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/\sqrt{n}$ jest a) zbieżny, b) bezwzględnie zbieżny? Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

60. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n a_n$, gdzie $a_n > 0$ jest zbieżny. Czy jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$? Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

61. Zbadać zbieżność szeregów

$$\begin{aligned} \text{a)} & \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots \\ \text{b)} & \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots \\ \text{c)} & \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \frac{1}{18} + \dots \end{aligned}$$

62. Wykazać, że iloczyn Cauchy'ego szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

jest rozbieżny. Czy odpowiedź zmieni się, gdy pierwszy szereg zamienimy na $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-5/4}$?

63. Wykazać tożsamość

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n^3 - n)3^n} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

64. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}.$$

65. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + (-1)^{n(n+1)/2}}.$$

66. Udowodnić tożsamość

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = -1.$$

67. Udowodnić, że liczby zespolone $z, w \in \mathbb{C}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek:

(*) $\exp z = \exp w$ i dla pewnego $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ spełniona jest równość $\exp(\alpha \cdot z) = \exp(\alpha \cdot w)$.

68. Wykazać, że dla każdego $w \in \mathbb{C}$ istnieje $z \in \mathbb{C}$ takie, że $\sin z = w$.

69. Dla $\varepsilon > 0$ połączmy

$$S_\varepsilon := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \varepsilon y > |x|, |z| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}.$$

Niech $f(z) = \exp(1/z)$ dla $z \neq 0$. Wykazać, że $f: S_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest surjekcją.

70. Posługując się tylko definicją liczby π z wykładu i szeregiem definiującym funkcję cosinus, wykazać, że

a) $\pi > 2\sqrt{2}$,

b) $\pi > 3$.

71. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych jest zbieżny. Udowodnić, że istnieje ciąg nieograniczony $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb dodatnich taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ też jest zbieżny.

72 (*). Niech $a_n \geq 0$. Wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n} \leq e \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$